A **Navier-Stokes féle egyenlet** vízszintes irányú stacionárius áramlásra vonatkozó egyszerűsített alakja.

Ennek levezetésekor feltételezzük, hogy az áramlás lamináris és a folyadék összenyomhatatlan.

$$f_{nyíró} + f_{nyomó} = 0$$

$$f_x(y+\Delta y) - f_x(y) = -\left[p\left(x+\Delta x\right) - p\left(x\right)\right]\Delta y \Delta w$$

$$-\left[\eta \frac{dv_x(y+\Delta y)}{dy} - \eta \frac{dv_x(y)}{dy}\right]\Delta x \Delta w = -\left[p\left(x+\Delta x\right) - p\left(x\right)\right]\Delta y \Delta w$$

$$\eta \frac{\left[\frac{dv_x(y+\Delta y)}{dy} - \frac{dv_x(y)}{dy}\right]}{\Delta y} = \frac{\left[p\left(x+\Delta x\right) - p\left(x\right)\right]}{\Delta x}$$

$$\eta \frac{d^2 v_x\left(y\right)}{dy^2} = \frac{dp\left(x\right)}{dx}$$

Bernoulli -egyenlet

$\frac{d\rho_E}{dt} = -\frac{dj}{dx}$ (lásd: Az általánosított transzportegyenlet megmaradó mennyiségekre)

$\rho \frac{dv_x}{dt} = -\rho v_x \frac{dv_x}{dx}$ $\qquad j = \frac{1}{A}\frac{dE}{dt} = \frac{1}{A}\frac{d\rho_E Ax}{dt} = \rho_E v_x$ (lásd: az áramsűrűség definíciója)

A fenti két összefüggés kombinálása után, plusz bevezetve a helyzeti energiával kapcsolatos tagot:

$$\rho \frac{dv_x}{dt} + \rho v_x \frac{dv_x}{dx} = \eta \frac{d^2 v_x\left(y\right)}{dy^2} - \frac{dp_x}{dx} - \rho g$$

ideális folyadék: $\eta \frac{d^2 v_x\left(y\right)}{dy^2} = 0$

stacioner áram: $\rho \frac{dv_x}{dt} = 0$

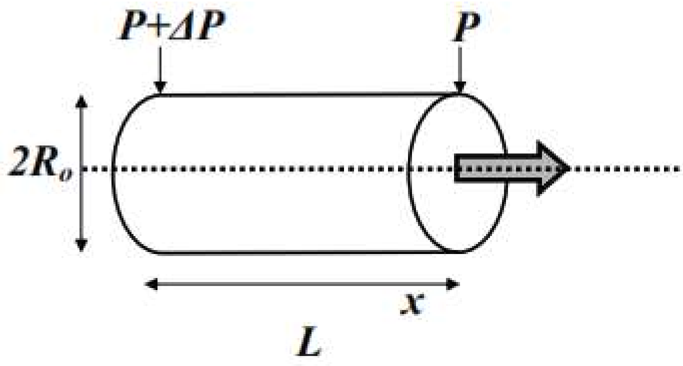
$$\rho v_x \frac{dv_x}{dx} + \frac{dp\left(x\right)}{dx} + \rho g = 0$$

$$\rho v_x dv_x + dp_x + \rho g dx = 0$$

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho g h = konst$$

Folyadék áramlása csőben

A sebességprofil:



$$f_{nyíró} + f_{nyomó} = 0$$

$$-\eta \frac{dv_x}{dr} \cdot 2r\pi L + -\Delta p \cdot r^2 \pi = 0$$

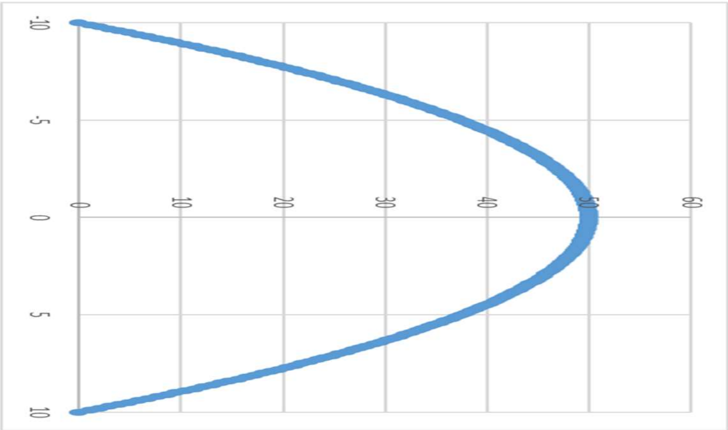
$$-\eta \frac{dv_x}{dr} \cdot 2\cancel{r}\cancel{\pi} L = \Delta p \cdot r^{\cancel{2}} \cancel{\pi}$$

$$dv_x = -\frac{\Delta p}{2\eta L} \cdot r dr$$

$$\int_0^{v_x} dv_x = -\frac{\Delta p}{2\eta L} \int_R^r r dr$$

$$v_x = -\frac{\Delta p}{2\eta L}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right) = \frac{\Delta p}{2\eta L}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right)$$

$$v_x = \frac{\Delta p}{2\eta L}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) = \frac{\Delta p R^2}{4\eta L}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = v_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right); \qquad v_{\max}\left(r = 0\right) = \frac{\Delta p R^2}{4\eta L}$$



A térfogatáram (Hagen-Poiseuille egyenlet)

$$\dot{V}=\frac{dV}{dr}=\int_0^R v_x 2r\pi dr=\int_0^R \frac{\Delta p}{2\eta L}\left(\frac{R^2}{2}-\frac{r^2}{2}\right)2r\pi dr$$

$$\dot{V}=\frac{\Delta p\pi}{2\eta L}\int_0^R \left(R^2-r^2\right)rdr=\frac{\Delta p\pi}{2\eta L}\int_0^R \left(R^2r-r^3\right)dr=\frac{\Delta p\pi}{2\eta L}\left[\frac{R^2r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$\dot{V}=\frac{R^4\pi}{8\eta}\cdot\frac{\Delta p}{L}$$

az átlagsebesség:

$$\overline{v}=\frac{\dot{V}}{A}=\frac{\frac{R^4\pi}{8\eta}\cdot\frac{\Delta p}{L}}{R^2\pi}=\frac{R^2}{8\eta}\frac{\Delta p}{L}=\frac{v_{\max}}{2}$$