

12. A HŐVEZETÉS MINT A BELSŐ ENERGIA TRANSPORTJA

A továbbiakban a hővezetés problematikáját vizsgáljuk. Ez a jelenség jóval bonyolultabb a diffúziónál, mivel a belső energia áramlásának többféle módja van. Az energia terjedhet **hővezetéssel, konvekcióval és sugárzással**.

A hővezetésnél a melegebb helyen lévő, jóval intenzívebb mozgást végző molekulák ütközések sorozatán keresztül adják át energiájukat a hidegebb helyen lévő, lomhább mozgású részecskének. Látni fogjuk, hogy a hővezetés a diffúzióhoz hasonló törvényekkel írható le.

A konvekcióval történő hővezetés rendkívül bonyolult folyamatok összessége. Ennél az esetenél az energiát a részecskék szállítják. Hőmérséklet különbség hatására az eltérő sűrűségű mozgékony fázisoknál megindul az anyagtranszport. A meleg levegő felszáll, a hidegebb pedig leszáll cirkuláris áramlásokat indítván el. A konvektív hőáramlás leírását megnehezíti az a tény, hogy az áramlás a hőmérséklet eloszlástól függ, amit azonban maga az áramlás is befolyásol. Igen gyakran alakul ki káotikus áramlás, **turbulencia**.

Hővezetésnek olyan transzportfolyamatot nevezünk, amelynek során hőmérsékleti inhomogenitás hatására az energia áramlása indul meg. A belsőenergia a magasabb hőmérsékletű helyről az alacsonyabb hőmérsékletű hely irányába áramlik. Az áramlás hajtóereje a hőmérséklet gradiense.

Az energiaáram-sűrűsége kifejezhető az energiaáram hajtóerejével:

$$j_u = L_u \nabla T \quad (12.1)$$

ahol az L_u vezetési tényező (transzport együttható) negatívját **hővezetési tényezőnek** nevezik: $L_u = -\lambda$. Az energiaáram sűrűség és a hajtóerő kapcsolata:

$$j_u = -\lambda \nabla T \quad (12.2)$$

Alkalmazzuk az általános transzportegyenletet a hővezetésre. Most ρ a belső energia sűrűségét jelenti, melyet u -val jelölünk.

A belső energia áramlására tehát írhatjuk, hogy:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla(-\lambda \nabla)T = \lambda \nabla^2 T \quad (12.3)$$

Megjegyezzük, hogy a fenti transzportegyenletben feltételeztük, hogy a hővezetési tényező független a helytől. A belsőenergia sűrűségét kifejezhetjük a fajhővel és a ρ_M tömegsűrűséggel.

$$du = \rho_M C_v dT \quad (12.4)$$

A mérlegegyenlet bal oldala tehát:

$$\rho_M C_v \frac{dT}{dt} \quad (12.5)$$

A fenti egyenletek összevonásával, megkaphatjuk a hővezetés általános **Fourier-féle egyenletét**:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T \quad (12.6)$$

ahol

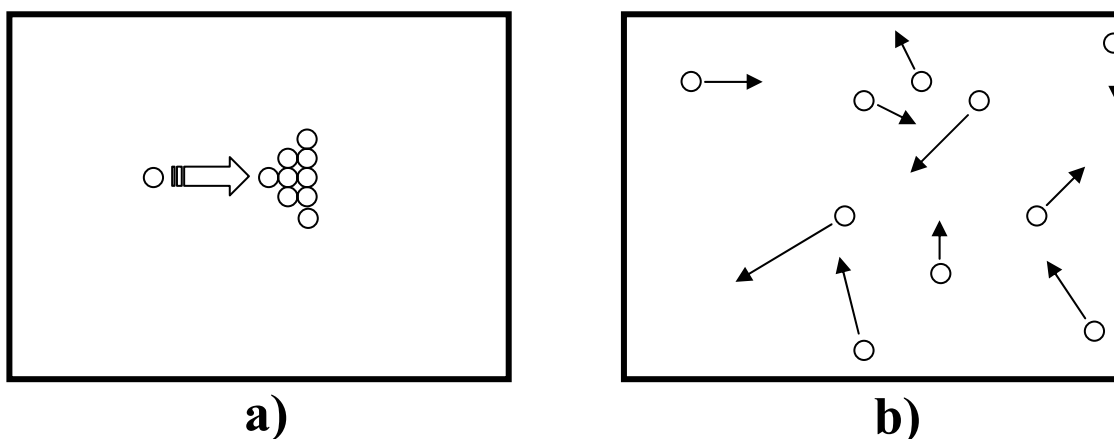
$$a = \frac{\lambda}{\rho_M C_v} \quad (12.7)$$

az un. **hőmérsékleti vezetési tényező**.

Vegyük észre a diffúziós és hővezetési egyenletek formai hasonlóságát! Ez azt jelenti számunkra, hogy a diffúziónál megtanultakat "csak" le kell fordítani a hővezetés nyelvére. Ha a Fick II. differenciálegyenletében a koncentrációt a hőmérsékletre, a diffúziós együtthatót pedig a hőmérsékleti vezetési tényezőre cseréljük ki, megkapjuk a Fourier féle hővezetési egyenletet. Ezen analógia a differenciálegyenletek megoldásában is megmutatkozik. Például stacionárius esetben egyirányú hővezetésnél a két eltérő hőmérsékletű részek között a hőmérséklet lineárisan változik a hely függvényében.

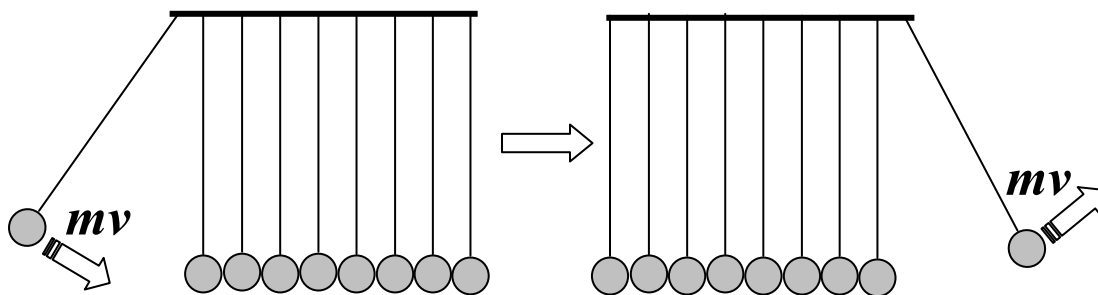
13. AZ IMPULZUSTRANSZPORT AVAGY FOLYADÉKOK ÉS GÁZOK ÁRAMLÁSA

Az impulzus olyan extenzív mennyiség amely fluid rendszerek (gázok és folyadékok) áramlási tulajdonságainak értelmezésénél játszik alapvető szerepet. Mivel az impulzus a tömeg és a sebesség szorzata, ebből következik, hogy mozgó részecskék impulzust is szállítanak. Az impulzus a belső energia áramához hasonlóan a molekulákkal együtt, de azok mozgásától függetlenül is vándorolhat. Ennek megfelelően az impulzus áramlása két részből tevődik össze: a konvektív és a konduktív áramlásból. Egyensúlyban a molekulák a tér minden irányában azonos valószínűséggel mozognak el, így a teljes rendszernek nincs eredő impulzusa. Gázok és folyadékok áramlása együtt jár az impulzus áramlásával, ezért ezt csak külső erők fenntartásával lehet elérni. A **konvektív vagy áramlásos impulzustranszportot** a 13.1. ábrával szemléltetjük. Képzeljük el azt, hogy a biliárdasztalon nyugalomban lévő golyókat egy m tömegű, v sebességgel mozgó golyóval eltaláljuk. Az ütközés előtt az összimpulzus mv volt, mivel a többi golyó állt, így ezeknek nincs impulzusa. A jól sikerült találat után a golyók szanaszét repülnek minden irányba. Mivel az impulzus megmaradó mennyiség, ezért a találat után a mozgó golyók megosztóznak az mv nagyságú impulzuson és annak rájuk eső részét magukkal viszik.



13.1 ábra: A konvektív impulzustranszport szemléltetése
a) ütközés előtt, **b)** ütközés után. A nyilak a sebességvektorokat jelölik

A **konduktív vagy vezetési impulzustranszport** nem jár együtt makroszkopikus mozgással. Ezt szemlélteti a 13.2. ábra, ahol egymás mellé, egyvonalban, szorosan érintkezve felfüggesztett több fémgolyó látható. A t időpillanatban a golyósor jobb oldalán lévő golyó helyzetének kimozdításával, majd elengedésével megütjük a golyósort. Az ütés során a kimozdított golyó mv nagyságú impulzust ad át a szomszédos golyónak. Ennek helyzete nem változik meg, sőt a többi golyóé sem! Amit megfigyelhetünk az az, hogy igen rövid Δt idő múlva a bal oldali utolsó golyó balra kibillen. Az impulzus tehát az "álló golyókon" át terjed, ebben az esetben jobbról balra.



13.2 ábra: A konduktív impulzustranszport szemléltetése

A fenti két példa az impulzus terjedésének két olyan esetét mutatja, amely molekuláris szinten is megvalósul. Folyadékokban és gázokban a folyton mozgó molekulák impulzust szállítanak. Ütközéskor pedig impulzust adnak át. Az impulzusáram nagysága és típusa nagymértékben meghatározza az áramlási tulajdonságokat. Ha csak a konvektív impulzusáramot vesszük figyelembe, azaz eltekintünk az energiadisszipációtól, ami mozgó fluid fázisokban a molekulák között ható belső súrlódás és a különböző részek közötti hőcsere miatt mindig felléphet, valamint ha feltételezzük, hogy a vizsgált rendszer összenyomhatatlan, akkor az un. **ideális áramláshoz** jutunk. Reális rendszereknél azonban mindig figyelembe kell venni a az energiadisszipáció mértékét, a **viszkozitást**.

Folyadékok és gázok áramlási tulajdonságainak megértése és leírása elképzelhetetlen az impulzustranszport törvényeinek ismerete nélkül. Ez teszi lehetővé ugyanis, azt hogy különböző geometriai körülményeknél határozzuk meg az áramló anyag sebességeloszlását, az átlagos áramlási sebességet, a térfogatáramot, az áramlás során fellépő nyíróerőket, valamint ezek kapcsolatát az áramlást előidéző hatásokkal.

13.1 Az ideális, surlódásmentes áramlás

Ideális, surlódás mentes áramlás során nincs energiavesztés. A befektetett mechanikai energia teljes egészében a mozgatandó közeg kinetikus energiáját növeli. Képzeljük el, hogy egy változó keresztmetszetű csőben folyadék áramlik vízszintesen a koordináta rendszer x - tengelyének irányában. Ezt az áramlást csak úgy tudjuk fenntartani, ha a cső két vége között nyomáskülönbséget hozunk létre. A folyadék a nagyobb nyomású helyről a kisebb irányába folyik. Tételezzük fel, hogy az áramlás során a folyadék sűrűsége nem változik, azaz nem következik be a folyadék számottevő tágulása, vagy összenyomódása. Ebből következik, hogy a nagyobb keresztmetszetű helyen másodpercenként áthaladó folyadék mennyisége szükségképpen meg kell hogy egyezzen a kisebb keresztmetszetű helyen átfolyó folyadék mennyiségével.

$$v_{x,1} \cdot A_1 = v_{x,2} \cdot A_2 \quad (13.1)$$

ahol $v_{x,1}$ az A_1 keresztmetszetű helyhez tartozó x -irányú áramlási sebesség, $v_{x,2}$ és A_2 jelentése hasonló. A folyadéknak fel kell gyorsulnia a szűkebb keresztmetszetű részben. Hasonlóan, ha a folyadék eléri a tágabb csőszakaszt, akkor lelassul. A gyorsulás, illetve a lassulás arra utal, hogy az áramlás irányában olyan erőnek (vagy nyomásnak) kell hatni, ami felelős az áramlási sebesség változásáért. Ebben az esetben az impulzus csak az áramlás irányában halad, arra

merőleges komponense nincs. Az x -irányú impulzusáram sűrűségét jelöljük j_x -el. Ennek értéke kifejezhető a $\rho \cdot v_x$ impulzussűrűség és a v_x áramlási sebesség szorzatával.

$$j_x(x) = \rho \cdot v_x^2 \quad (13.2)$$

Ha az áramlás irányára egy merőleges felületet helyezünk el, akkor annak egységnyi felületére j_x nagyságú impulzusáramot szállítanak a felülettel ütköző molekulák. Ha ellentétes irányú, de azonos nagyságú sebességgel pattannak vissza, akkor az időegység alatti impulzusváltozás $2j_x$. Ez pedig éppen az egységnyi felületű falra ható erő, a nyomás:

$$p(x) = 2j_x(x) = 2\rho v_x^2 \quad (13.3)$$

A fenti összefüggésből rögtön következik, hogy a változó keresztmetszetű csőben a nyomás a cső tengelye mentén nem egyenletesen változik. A szűkebb keresztmetszetű helyeken – a nagyobb áramlási sebesség miatt – a nyomás nagyobb, mint a tágabb részeknél. Ezt fogalmazza meg a Bernulli törvény.

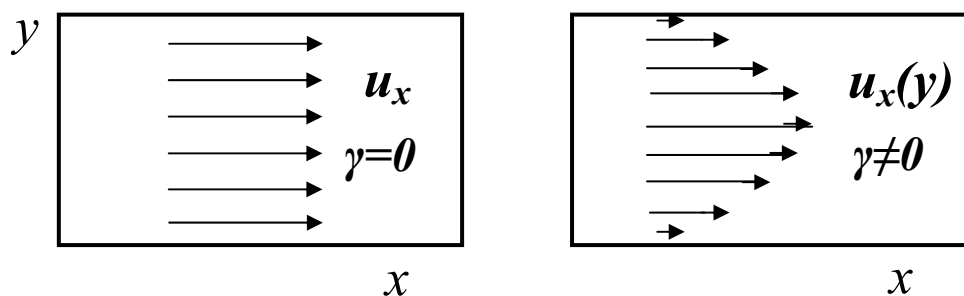
Az áramlási viszonyok jellemzésére bevezethetjük az u_x elmozdulásvektort. Surlódásmentes folyadékban minden egyes réteg azonos módon mozog, tehát az elmozdulásvektor nem függ a helytől. A valóságban azonban az egymás melletti folyadékrétegek, az intermolekuláris kölcsönhatások áramlást fékező hatása miatt, nem egyformán mozognak. A falhoz közeli rétegek mozgása lassabb, a faltól távoliaké pedig gyorsabb. Az elmozdulásvektor tehát változik az mozgásra merőleges irányban. E változás mértékét jellemezhetjük γ deformációval, amelyet az u_x elmozdulásvektorok gradienseként definiálunk:

$$\gamma = \frac{du_x}{dy} \quad (13.4)$$

Surlódásmentes folyadékban nem lép fel deformáció, $\gamma = 0$.

Az elmozdulásvektor időbeli változásával definiálhatjuk a v_x áramlási sebességet is:

$$v_x = \frac{du_x}{dt} \quad (13.5)$$



13.3. ábra: Az elmozdulásvektorok és a deformáció surlódásmentes és reális folyadékban.

Az ideális folyadék a mozgatásához szükséges kinetikus energiát teljes egészében megőrzi, nem disszipálódik, azaz nem lép fel energiavesztés. Az ideális folyadéknál nem beszélhetünk a disszipált energiával kapcsolatos viszkozitásról. Valójában az ideális folyadék koncepció olyan nem létező határeset, amelyet a kismolekulájú folyadékok és gázok bizonyos körülmények között megközelíthetnek, de soha el nem érhetnek.

13.2 A belső súrlódás

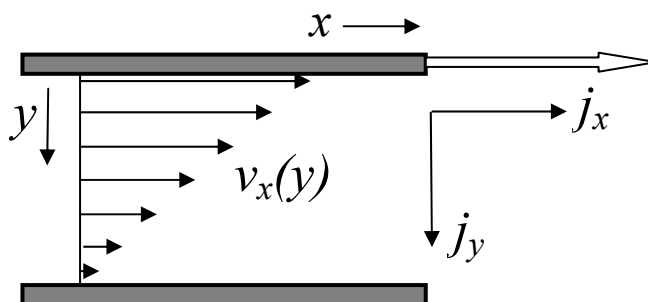
Képzeljünk el két egymással párhuzamos síklapot (13.4. ábra). Közöttük legyen gáz, vagy folyadék. A felső lapot mozgassuk állandó sebességgel az x -tengely irányában. A felső lap közvetlen közelében lévő molekulákat a mozgó lap a vonzó intermolekuláris kölcsönhatások miatt magával viszi. Ezek a molekulák az x -irányban sodorják a felülettől távolabb levő szomszédjaikat. Ezt a hatást **belső súrlódásnak** nevezzük. A belső súrlódás miatt **nyíróerők** lépnek fel, amelyek a x -tengely irányú mozgást idéznek elő, az alsó lap felé csökkenő sebességgel. A nyíróerők sebességjáruléka tehát a felső laptól az alsó felé haladva fokozatosan csökken, az alsó lapnál zérussá válik. Az x -irányú áramlási sebesség nagysága az y irány mentén változik. A nagyobb sebességű réteg gyorsítani igyekszik a lassúbbat, és fordítva. A belső súrlódás következménye az hogy a mechanikai energia egy része disszipálódik, hővé alakul. Minél nagyobb a fluid rendszer viszkozitása, annál nagyobb a disszipálódott energia mértéke.

Az impulzus x -irányú konvektív transzportja mellett, beszélhetünk az impulzus y irányú áramlásáról is, amely merőleges a molekulák áramlásának irányára. Az impulzusáram hajtóereje az áramlási sebességek egyes rétegekbeli különbözősége (inhomogenitása). Ha nem lenne különbség az áramlási sebességben, nem lépne fel x irányú impulzusáram. Ez jellemzi az előző fejezetben tárgyalt ideális folyadékot.

Ha egy molekula nem mindig párhuzamosan halad az áramlás irányával, hanem attól eltér, mondjuk nemcsak x -irányú, hanem y -irányú sebességsebesség összetevője is van, akkor az impulzus nemcsak az áramlás irányában, hanem arra merőlegesen is áramlik.

$$j_{x,y} = \rho \cdot v_x v_y \quad (13.6)$$

A molekulák ekkor az x -irányú impulzust közvetítik az y -irányba ahogy ezt a x. ábra szemlélteti. Megjegyezzük, hogy nyugalmi állapotban a keresztirányú impulzusáramok is kiegyenlítik egymást. Ez a keresztirányú „impulzus diffúzió” csak áramló rendszereknél lép fel.



13.4. ábra: Az impulzusáram reális rendszerekben

Az eddigiekhez hasonlóan megfogalmazhatjuk az impulzusáram-sűrűség és a hajtóerő kapcsolatát. Ehhez azonban először tudnunk kell, hogy milyen intenzív jellegű mennyiség tartozik az extenzív jellegű impulzushoz. Termodinamikai tanulmányaink során megtanultuk, hogy az energia valamely extenzív mennyiség szerinti deriváltja éppen a hozzá tartozó intenzív mennyiséget adja meg. Most az energia a kinetikus energiát jelenti, az extenzív mennyiség pedig az impulzus. Az impulzus változással kapcsolatos intenzív mennyiséget, tehát az alábbi derivált adja meg:

$$y_i = \frac{\partial E_{kin}}{\partial(m \cdot v_x)} = \frac{\partial \left(\frac{m \cdot v_x^2}{2} \right)}{\partial(m \cdot v_x)} = v_x \quad (13.7)$$

A fenti összefüggésből kiolvasható, hogy az impulzushoz tartozó jellemző intenzív mennyiség az áramlási sebesség. Az impulzus konduktív áramsűrűsége az 1. fejezetben leírtak szerint egy anyagi állandó és a sebesség gradiensének szorzataként adható meg:

$$j_i = -\eta \nabla v_x = -\eta \frac{dv_x}{dy} \quad (13.8)$$

ahol az η transzportegyütthatót **dinamikai viszkozitásnak** nevezzük. A negatív előjel arra utal, hogy az impulzus a nagyobb sebességű helyről áramlik a kisebb sebességű felé.

Vizsgáljuk meg, hogy mi a szemléletes jelentése az impulzusáram-sűrűségnek. Ha az impulzusáram-sűrűséget megszorozzuk az áramlási síkban fekvő A_s nagyságú felülettel, akkor az impulzusáramot kapjuk:

$$\frac{dI}{dt} = \mathbf{j}_i \cdot A_s \quad (13.9)$$

Az impulzusmegmaradás tétele azt fejezi ki, hogy egy adott térrész impulzusának időbeli változása egyenlő a térfogatban lévő anyagra ható erők f eredőjével:

$$\mathbf{j}_i A_s = \frac{dI}{dt} = \frac{d(mv_x)}{dt} = m \cdot \frac{dv_x}{dt} = ma = f_x \quad (13.10)$$

A fenti összefüggésben a jelöli a gyorsulást és f_x azt a nyíróerőt, amely az egyes rétegek x irányú elmozdításához szükséges. Ha ennek az erőnek a negatívját elosztjuk az A_s nagyságú nyírásnak kitett felülettel, akkor éppen a τ nyírófeszültséget kapjuk meg:

$$\tau = -f_x / A_s \quad (13.11)$$

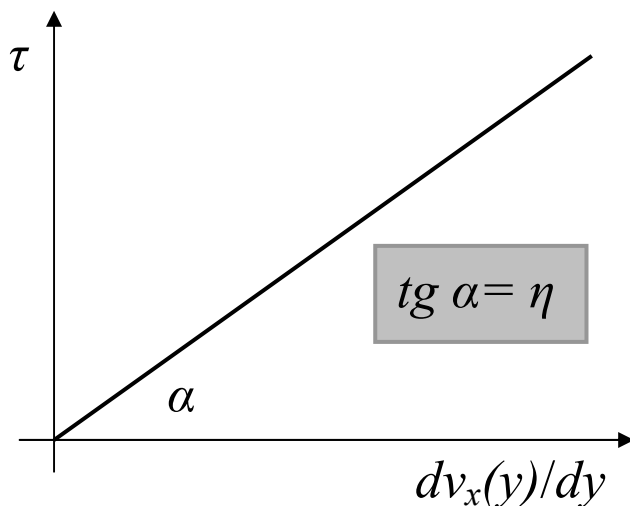
A fentiekből következik, hogy a **konvektív impulzusáram-sűrűség nem más, mint a nyírófeszültség**. A (13.8)-as és (13.11)-es egyenletek alapján levonhatjuk azt a következtetést, hogy a nyírófeszültség arányos az áramlási sebesség inhomogenitásával és egy anyagi állandóval.

$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy} \quad (13.12)$$

Az arányossági tényező a **dinamikai viszkozitás** vagy **belső súrlódás**, amely a folyással szembeni ellenállás mértékét jellemzi. A (13.12)-es egyenletet **Newton-féle viszkozitási törvénynek** nevezzük. Megjegyezzük, hogy a viszkozitás reciprokát **fluiditásnak**, a sebességgradienst pedig gyakran **deformáció-sebességnek** nevezik. Ennek oka, hogy a γ deformációt az u_x elmozdulásvektorok gradienseként definiáljuk. A deriválás sorrendjének felcserélése rögtön megmutatja a kapcsolatot a sebességgradiens és a deformáció sebesség között:

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{du_x}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{du_x}{dy} \right) = \frac{d\gamma}{dt} \quad (13.13)$$

A viszkozitás dimenziója rögtön kiolvasható a az (13.12)-es egyenletből: $N \cdot s / m^2$, vagy másképpen $Pa \cdot s$. A viszkozitás régebbi egysége a Poise (P) vagy a centipoise (cP). $1 P = 0,1 Pa \cdot s$. Azokat a folyadékokat, amelyeknek viszkozitása nem függ a nyíróerők nagyságától **newtoni –folyadékoknak** nevezzük. Ha a (13.12)-es egyenlet alapján ábrázoljuk a nyírófeszültséget a sebességgradiens függvényében, akkor az ún. **folyásgörbét** kapjuk. Newtoni folyadékok folyásgörbéje a 13.4. ábrán látható egyenes, melynek meredeksége a viszkozitás.



13.4. ábra: Newtoni folyadék folyásgörbéje

A köznapi értelemben folyadékoknak tekintett anyagok viszkozitása több nagyságrendet ölel át. Ez a skála a kis viszkozitású vizet és a nagy viszkozitású bitument egyaránt tartalmazza. Az igen nagy viszkozitású bitumen észrevehető módon nem folyik. Nagy nyíróerő hatására azonban deformálódik. Kiseb nyírás hatása csak néhány hónap alatt következik be észlelhető folyás. Az említett példa jól szemlélteti azt, hogy a szilárd és

folyékony anyagok között nem húzható egyértelmű határ. Az amorf szilárd anyag és a folyadék között nincs szerkezeti különbség. Megállapodás szerint folyadéknak nevezzük a $0 < \eta < 10^3$ Pas viszkozitás tartományba eső anyagokat, míg szilárd testekre a $\eta > 10^8$ Pas a jellemző. Ez az önkényes besorolás széles intervallumot hagy a szilárd és a folyékony állapot között. Ennek az az oka, hogy a folyási tulajdonságok nem csak a hőmérséklettől, hanem a mechanikai igénybevétel sebességétől is függenek.

A folyási tulajdonságok jellemzésére gyakran használják a ν **kinematikai viszkozitást**, ami a dinamikai viszkozitás és a folyadék sűrűségének hányadosa:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (13.14)$$

A kinematikai viszkozitás dimenziója m^2 / s .

13.1. Táblázat: Néhány anyag viszkozitása, $mPa \cdot s$ egységben

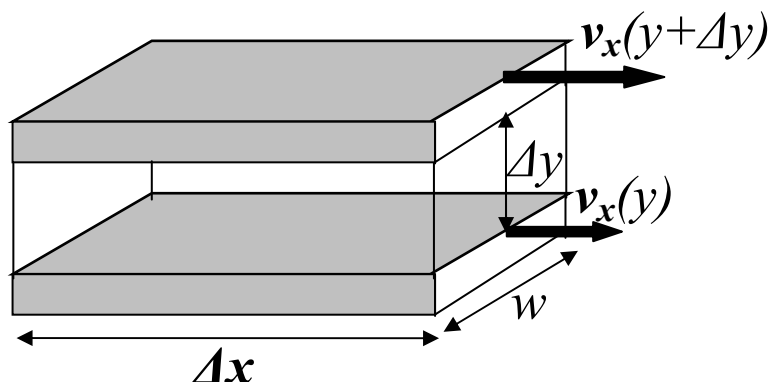
Anyag	Hőmérséklet	Viszkozitás
Levegő	18 °C	0,018
Víz	0 °C	1,8
Víz	20 °C	1
Víz	100 °C	0,28
Glicerin	20 °C	1500
Higany	20 °C	1,6
n-Pentán	20 °C	0,23
Argon	85 K	0,28
He ⁴	4,2 K	0,033
Szuperfoly. He ⁴	< 2,1 K	0
Üveg		> 10 ¹⁵

A newton féle viszkozitási törvény azt mutatja, hogy lamináris áramlás esetén az egyes rétegek között, a belső súrlódás miatt ébredő nyíróerők és az áramlási sebességprofil szoros kapcsolatban állnak egymással. A továbbiakban sebességeloszlást, valamint a nyírófeszültség- eloszlást vizsgáljuk meg.

13.3 Az áramlási sebességet meghatározó tényezők

Az előző fejezetekben beláttuk, hogy áramló fluid rendszereknél az áramlási sebesség a belső súrlódás miatt nem állandó, hanem az áramlás irányára merőlegesen változik. Az anyagtranszport leírásánál nélkülözhetetlen az **áramlási sebességprofil**, a $v_x(y)$ függvény, amely megadja hogyan változik a lineáris sebesség a hely függvényében.

Az egyszerűség kedvéért tekintsük két nyugalomban lévő párhuzamos síklap közé zárt folyadék, vagy gáz x irányú egyenletes áramlását. Tételezzük fel, hogy a mozgást az L hosszúságú, h magasságú és w mélységű rés végeinél ΔP nagyságú, időben állandó nyomáskülönbséggel érik el. Szemeljük ki önkényesen két, a síklapokkal párhuzamos haladó Δx hosszúságú és egymástól Δy távolságra lévő réteget.



13.6. ábra: Két áramló réteg mozgásának sematikus ábrázolása

Az egyik réteg mozogjon y magasságában, a másik pedig $y + \Delta y$ távolságra az alsó síklaptól. Az y helyen mozgó rétegre Newton viszkozitás törvénye alapján

$$f_x(y) = -\eta \cdot \Delta x \cdot w \cdot \left(\frac{dv_x(y)}{dy} \right) \quad (13.15)$$

nagyságú fékezőerő hat. A fenti erőt úgy kaptuk, hogy a nyírófeszültséget megszoroztuk a réteg $\Delta x w$ nagyságú felületével. A másik rétegre ható erőt hasonlóan kapjuk:

$$f_x(y + \Delta y) = -\eta \cdot \Delta x \cdot w \cdot \left(\frac{dv_x(y + \Delta y)}{dy} \right) \quad (13.16)$$

A nyírás során a molekulák között fellépő belső súrlódás legyőzésére erőt kell kifejteni. A súrlódással kapcsolatos erő a két nyíróerő különbsége, amit kifejezhetünk a két sík végeinél ható $\Delta P = P(x + \Delta x) - P(x)$ nagyságú nyomáskülönbség segítségével:

$$f_x(y + \Delta y) - f_x(y) = [P(x + \Delta x) - P(x)] \cdot w \cdot \Delta y \quad (13.17)$$

Fejezzük ki nyíróerőket a sebességgradienssel:

$$\eta \cdot \Delta x \cdot w \cdot \left(\frac{dv_x(y + \Delta y)}{dy} \right) - \eta \cdot \Delta x \cdot w \cdot \left(\frac{dv_x(y)}{dy} \right) = [P(x + \Delta x) - P(x)] \cdot w \cdot \Delta y \quad (13.18)$$

Rendezzük át a fenti egyenletet úgy, hogy a bal oldalon az áramlási sebesség y szerinti második differencia hányadosa, a jobb oldalon pedig a nyomás x szerint első differencia hányadosa legyen. Ekkor kapjuk, hogy

$$\eta \cdot \frac{\left(\frac{dv_x(y + \Delta y)}{dy} \right) - \left(\frac{dv_x(y)}{dy} \right)}{\Delta y} = \frac{[P(x + \Delta x) - P(x)]}{\Delta x} \quad (13.19)$$

Minden határon túli finomítás ($\Delta y \rightarrow 0$ és $\Delta x \rightarrow 0$) után az eredmény:

$$\frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial P(x)}{\partial x} \quad (13.20)$$

A fenti összefüggés a hidrodinamika **Navier-Stokes** féle egyenletének egyirányú stacionárius áramlásra vonatkozó egyszerűsített alakja. Ennek levezetésekor feltételeztük, hogy az áramlás lamináris és a folyadék összenyomhatatlan.

A fenti egyenlet bal oldalán az áramlási sebesség hely szerinti második deriváltja van. Tudjuk, hogy a második derivált előjele a függvény homorú, vagy domború voltára utal. Ha a vízszintes rés jobb oldalán kisebb a nyomás, mint a bal oldalán, akkor a nyomásgradiens értéke negatív, a második derivált előjele úgyszintén. Ebből következik, hogy a sebességprofil az y tengelytől nézve domború, azaz az áramlás balról jobbra, azaz a nagyobb nyomású helyről a kisebb felé történik. Az is kiolvasható a fenti egyenletből, ha nincs nyomásgradiens, akkor vagy nincs áramlás, vagy az áramlási sebesség a síkra merőleges irányban lineárisan változik.

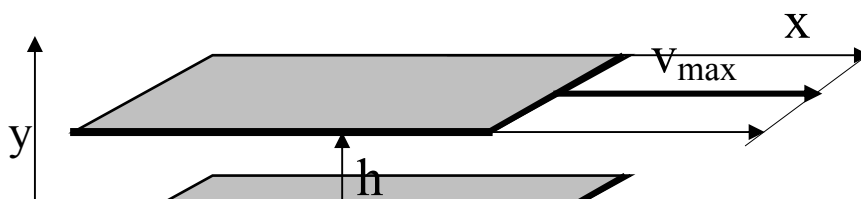
A követ (13.20)-as egyenlet segítségével határozhatjuk meg a különböző típusú áramlásoknál kialakuló sebességi profilt.

13.4. Az áramlási profil

A következőkben vizsgáljuk meg összenyomhatatlan folyadékok lamináris áramlásának néhány egyszerűbb, de gyakran előforduló esetét. Az áramlást jellemezzük az áramlás x irányára merőlegesen mért $v_x(y)$ áramlási sebesség-eloszlással. Ez utóbbit nevezhetjük áramlási profilnak. Ebből meghatározhatjuk a $\overline{v_x}$ átlagsebességet, majd pedig az I_V térfogatáramot. Az adott helyhez tartozó nyírófeszültséget, vagy nyíróerőt is az áramlási profil segítségével határozhatjuk meg. Mindezekből következik, hogy az áramlási profilnak kitüntetett szerepe van folyadékok és gázok áramlásának leírásában.

13.4.1 Az áramlási sebesség egyenletesen mozgó és álló párhuzamos felületek között

Tekintsünk két vízszintes irányban párhuzamos, egymástól h távolságra lévő síklapot. Az alsó síklap helyzete legyen rögzített, a felső pedig mozogjon egyenletes v_{\max} sebességgel. Töltsük ki a két síklap közti teret folyadékkal. Az x és z tengelyeket a síkokkal párhuzamosan vesszük fel, úgy hogy az x tengely mutasson a felső sík elmozdulásának irányába. Legyen a síklapok hossza L , z -irányú mérete pedig w .



13.7. ábra: Egyenletesen mozgó síklappal előidézett áramlás.

A folyadékra most csak a mozgó és a nyugalomban lévő felületek hatnak. Ezek hatására a folyadék az x irányban áramlik. Az áramlás intenzitása az x tengely irányában mindenütt azonos. Ez a (13.3)-as összefüggés szerint azt jelenti, hogy a folyadék nyomása nem változik az x tengely mentén, azaz nincs nyomásgradiens. A folyadék sebessége csak az y irányban változhat.

A $v_x(y)$ sebességeloszlást a (13.20)-as Navier-Stokes egyenlet segítségével határozhatjuk meg:

$$\left(\frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (13.21)$$

A fenti egyenlet megoldása szerint a sebességeloszlás a folyadékban az y -tengely mentén lineáris. A határfeltételek figyelembevételével sebességprofil a következő alakú:

$$v_x(y) = \frac{v_{\max}}{h} \cdot y \quad (13.22)$$

A felső mozgó lapnál ($y=h$) a sebesség maximális, míg az alsó síklap felületén ($y=0$) az áramlási sebesség zérus. Vegyük észre, hogy sem az áramlási sebesség, sem az áramlási profil alakja nem függ a viszkozitástól.

Mérésekkel az időegység alatt, egységnyi felületen átáramló folyadék mennyiségét is meg tudjuk határozni. Ez az I_V térfogatáram kiszámítható az áramlási profil segítségével. Összegeznünk kell a $w dh$ nagyságú elemi felületelemeken átfolyó $v_x(y) w dh$ nagyságú folyadék mennyiségét.

$$I_V = w \int_0^h v_x(y) dy = \frac{w v_{\max}}{h} \int_0^h y dy = w h \frac{v_{\max}}{2} \quad (13.23)$$

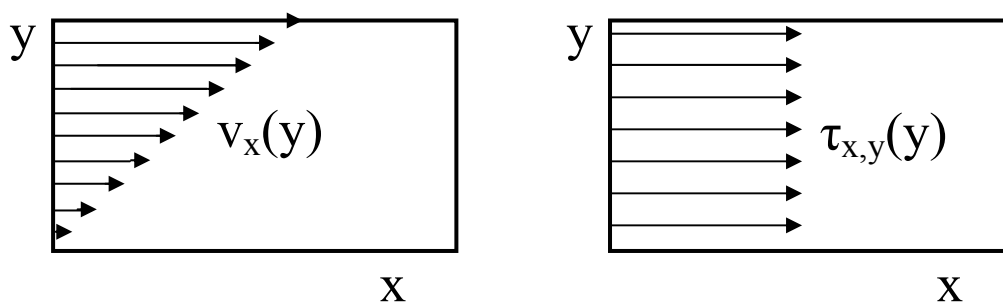
A térfogatáram az átfolyási felület és a maximális sebesség szorzatának a fele. A fenti összefüggésből rögtön következtethetünk az átlagos áramlási sebességre is. Nem kell mást tennünk, mint a térfogatáramot elosztani a wh nagyságú felülettel.

$$\overline{v_x} = \frac{I_V}{wh} = \frac{v_{\max}}{2} \quad (13.24)$$

Az átlagos áramlási sebesség a maximális sebesség fele. A sebességeloszlásból meghatározhatjuk az álló, illetve mozgó síkra ható nyíróerő, illetve a nyírófeszültség eloszlása is. Ehhez a Newton-féle viszkozitás egyenletet használjuk fel.

$$\tau_{xz}(y) = \eta \frac{dv_x}{dy} = \eta \frac{v_{\max}}{h} \quad (13.25)$$

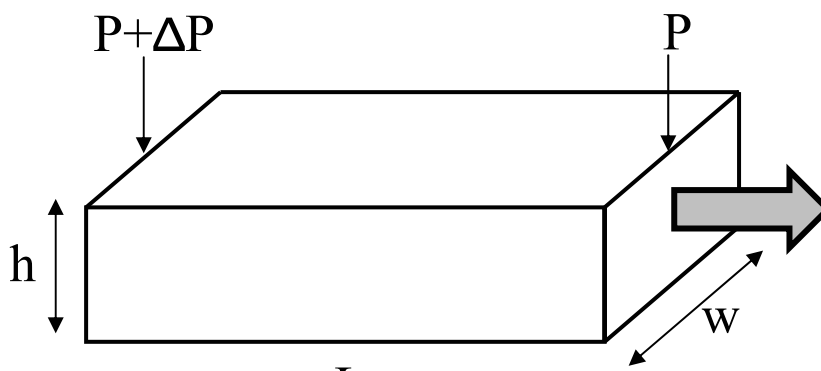
Itt $\tau_{x,z}$ az x és z síkra ható nyírófeszültséget jelöli. A Newton egyenletből arra az eredményre jutunk, hogy a nyírófeszültség csak a v_{\max}/h sebesség-gradienstől és a viszkozitásától függ, nem függ a helytől. A 13.8. ábra mutatja az áramlási sebesség és a nyíróerő y irányú változását



13.8. ábra: Az áramlási profil és a nyíróerőfeszültség eloszlása egyenletesen mozgó és nyugvó síklapok között

13.4.2 Folyadék áramlása vízszintes részben

Tekintsünk két rögzített, párhuzamos sík között, ΔP nagyságú nyomáskülönbség hatására végbemenő áramlást. A koordináta rendszerünket válasszuk meg úgy, hogy az x tengely mutasson az áramlás irányába. Legyen a résvastagság h , a rés mélysége w és a rés hossza pedig L .



13.9. ábra: Áramlás részben

A áramlási profilt most is a Navier-Stokes egyenlet segítségével határozhatjuk meg. Használjuk ki azt, hogy a összenyomhatatlan folyadék esetén, állandó résvastagság mellett a nyomásesés egyenletes. A nyomásgradiens helyett írhatjuk, hogy

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x} = -\frac{\Delta P}{L} \quad (13.26)$$

Ezt figyelembe véve a Navier-Stokes egyenlet a következő formában írhatjuk:

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) = -\frac{\Delta P}{\eta \cdot L} \quad (13.27)$$

Stacionárius esetben a fenti egyenlet jobb oldala állandó érték, így a sebességre azt kapjuk, hogy

$$v_x(y) = \frac{\Delta P}{2\eta L} \cdot y^2 + ay + b \quad (13.28)$$

Az a és b állandókat a határfeltételekből határozhatjuk meg. Az áramlási sebesség ugyanis zérus a két lap felszínén, azaz teljesülnie kell a következő két feltételnek: $v_x(y=0) = 0$ és $v_x(y=h) = 0$. Ezekből rögtön következik, hogy $b=0$. A sebességprofilra azt kapjuk, hogy

$$v_x(y) = \frac{\Delta P}{2\eta L} \cdot (hy - y^2) \quad (13.29)$$

A fenti képletből látszik hogy a sebességeloszlás a folyadékréteg áramlására merőleges irányban parabolikus. A maximális áramlási sebesség a réteg közepénél van.

$$v_{\max} = \frac{h^2}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L} \quad (13.30)$$

Meghatározhatjuk az időegység alatt a résen átáramló folyadék mennyiségét is. Ehhez nem kell mást tennünk, mint összegezni a wdh nagyságú felületelemeken átfolyó $v_x(h)wdh$ mennyiségű folyadékot:

$$I_V = w \int_0^h v_x(y) dy = \frac{wh^3}{12\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L} = wh \cdot \frac{2}{3} v_{\max} \quad (13.31)$$

A számítás meglepő eredménye az, hogy a térfogatáram nem az áramlási felülettel (wh), hanem annak a réstávolság négyzetével képzett szorzatával arányos. A fenti összefüggésből az is látszik, hogy minél nagyobb a viszkozitás, annál kevesebb folyadékot lehet időegység alatt szállítani. A folyadék átlagos áramlási sebességét is meghatározhatjuk a fenti egyenletből. Ehhez nem kell mást tennünk, mint a térfogatáramot elosztani az áramlási keresztmetszettel.

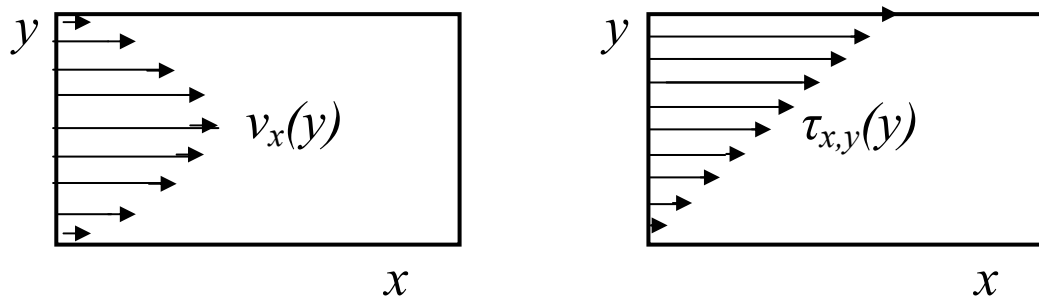
$$\bar{v}_x = \frac{I_V}{wh} = \frac{h^2}{12\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L} = \frac{2}{3} v_{\max} \quad (13.32)$$

Az átlagos áramlási sebesség a maximális sebesség kétharmada.

Határozzuk meg a nyírófeszültség eloszlását. Ezt a Newton egyenlet felhasználásával kaphatjuk meg:

$$\tau_{xz}(y) = \eta \frac{dv_x}{dy} = \frac{\Delta P}{2L} (h - 2y) \quad (13.33)$$

A fenti összefüggés szerint a nyíróerők lineárisan változnak a résben a síklapokra merőleges irányban.

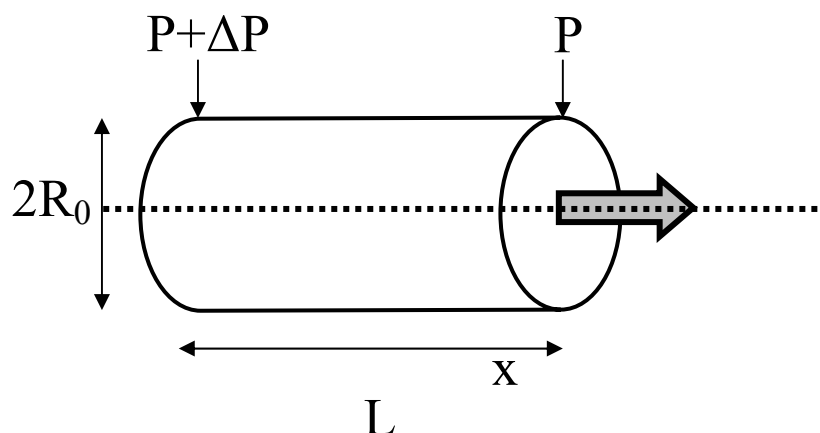


13.10. ábra: Az áramlási profil és a nyíróerők eloszlása párhuzamos résben

13.4.3 Folyadék áramlása csőben

Végül vizsgáljuk meg a folyadék áramlását egy tetszőleges, de végéig azonos keresztmetszetű csőben. Vegyünk egy L hosszúságú és R_0 sugarú csövet. Mozgassa a

folyadékot x irányban a cső végeinél mért ΔP nagyságú nyomáskülönbség. Határozzuk meg a sebesség sugár irányú függését: a $v_x(r)$ - függvényt.



13.11. ábra: Áramlás csőben

Nyilvánvaló, hogy a folyadékáramlás sebessége mindenütt x irányú, változás csak sugár irányban, azaz y és z irányában várható. A Navier-Stokes egyenlet ebben az esetben a következő alakú:

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) = -\frac{\Delta P}{\eta \cdot L} \quad (13.34)$$

A sugár irányú függés meghatározása érdekében célszerű polárkoordinátákat bevezetni. Válasszuk meg r -t úgy, hogy értéke legyen a cső tengelyénél $r=0$, a cső falánál pedig $r=R_0$. A fenti egyenlet átírása után az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dv_x}{dr} \right) = -\frac{\Delta P}{\eta \cdot L} \quad (13.35)$$

Ennek általános megoldása a következő:

$$v_x(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L} \cdot r^2 + a \cdot \ln r + b \quad (13.36)$$

Az a és b együtthatókat a peremfeltételek segítségével számíthatjuk ki. Mivel a sebesség minden pontban véges, beleértve a középpontot is, ezért $\ln r$ divergenciája miatt az a állandót nullának kell választani. A b állandót a $v_x(r=R_0)=0$ feltételből határozhatjuk meg. A végeredmény:

$$v_x(r) = \frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot (R_0^2 - r^2) \quad (13.37)$$

A fenti összefüggést más módon is levezethetjük. Szemeljük ki a vízszintesen áramló folyadékban egy dz vastagságú réteget, amely z irányú mozgást végez. A folyadék mozgatásához nyomáskülönbségre van szükség. A dz vastagságú folyadékréteg csak akkor mozog, ha jobb oldalán és bal oldalán a nyomás különbözik. Legyen a bal oldali felszínén a nyomás P , míg a jobb oldali felszínén $P+dP$. Ez azt jelenti, hogy a folyadék jobbról balra áramlik. Meghatározhatjuk minden egyes r sugarú, teleszkópszerűen áramló réteghez tartozó nyírófeszültséget. Ezt úgy kapjuk meg, hogy vesszük az áramlás irányába mutató mozgatóerőt és elosztjuk az áramló réteg súrlódó felületével. A mozgatóerő a réteg két oldala közötti dP nyomáskülönbség és az $r^2\pi$ nagyságú felületelem szorzata. A vizsgált r sugarú réteg $2r\pi \cdot dz$ nagyságú felülettel érintkezik a szomszédos rétegekkel. Az impulzusáram-sűrűség, ami nem más, mint a nyírófeszültség negatívja tehát:

$$j_i = -\tau = -\frac{r^2\pi \cdot dP}{2r\pi \cdot dx} = -\frac{r}{2} \cdot \frac{dP}{dx} \quad (13.38)$$

Stacionárius áramlásnál a cső két vége közötti Δp nagyságú nyomáskülönbség egyenletesen változik az L hosszúságú cső mentén, mivel a folyadék összenyomhatatlansága miatt a térfogatáram nem függ a helytől. Ebből következik, hogy

$$\frac{dP}{dx} = konstans = \frac{\Delta P}{L} \quad (13.39)$$

Az impulzusáram-sűrűség tehát

$$j_i = -\frac{r}{2} \cdot \frac{\Delta P}{L} = -\eta \cdot \frac{dv_z}{dr} \quad (13.40)$$

A differenciálegyenlet megoldása érdekében rendezzük át a fenti összefüggést.

$$dv_z = \frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot 2 \cdot r \cdot dr = \frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot d(r^2) \quad (13.41)$$

Az általános megoldás rögtön kiolvasható a fenti egyenletből:

$$v_z(r) = \frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot r^2 + konstans \quad (13.42)$$

A konstans értékének meghatározása érdekében vegyük figyelembe, hogy a cső falánál a folyadék sebessége zérus, azaz $v_z(r = R_0) = 0$. E feltétellel az (13.42)-es összefüggés az alábbira módosul:

$$v_z(r) = \frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot (R_0^2 - r^2) = \frac{\Delta P R_0^2}{4L\eta} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) \quad (13.43)$$

Az áramlási profilt egy parabola írja le. A maximális áramlási sebesség a cső tengelyénél van: $v(r = 0) \equiv v_{\max}$. Ez egyenesen arányos az áramlást előidéző nyomáskülönbséggel, a sugár négyzetével és fordítottan arányos a viszkozitással, valamint a cső hosszával:

$$v_{\max} = \frac{R_0^2}{4\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L} \quad (13.44)$$

Az (13.43)-es és (13.44)-es egyenletek összevonásával a sebességprofil az alábbi formában is megadhatjuk:

$$v_x(r) = v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) \quad (13.45)$$

A cső keresztmetszetén időegység alatt átáramló folyadékmennyiséget úgy kapjuk meg, hogy az egyre nagyobbra választott $2r\pi \cdot dr$ felületű gyűrű alakú felületelemeken átfolyó $v(r) \cdot 2r\pi \cdot dr$ mennyiségű folyadék mennyiségét összegezzük a teljes keresztmetszetre:

$$I_V = 2\pi \cdot \int_0^{R_0} r \cdot v(r) \cdot dr \quad (13.46)$$

A fenti integrálás az áramlási profil segítségével könnyen elvégezhető. A térfogatáramra azt kapjuk, hogy

$$I_V = \frac{\pi \cdot R_0^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L} \quad (13.47)$$

A fenti összefüggésből kiolvasható, hogy az egységnyi idő alatt átáramló folyadékmennyiség a cső sugarának negyedik hatványával arányos. Ezt az egyenletet a szakirodalomban Hagen-Poiseuille törvénynek nevezik.

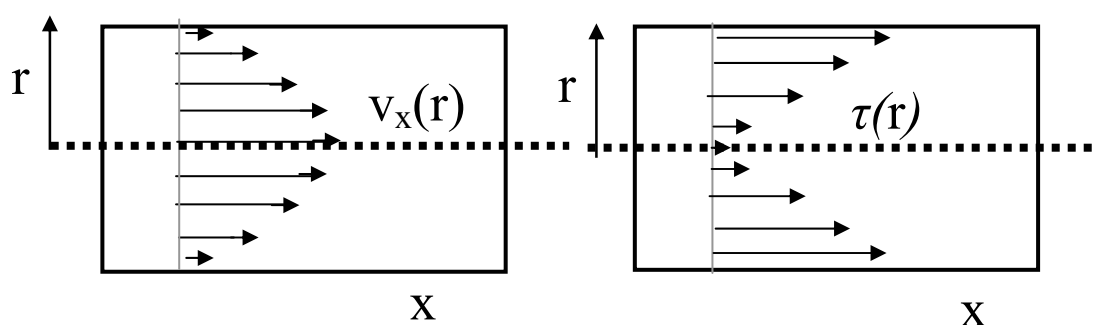
A Hagen-Poiseuille törvényből az átlagsebességet megkapjuk, ha a térfogatáramot elosztjuk a cső keresztmetszetével.:

$$\overline{v_x} = \frac{I_V}{R_0^2 \pi} = \frac{R_0^2}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L} = \frac{1}{2} v_{\max} \quad (13.48)$$

Az átlagos áramlási sebesség pontosan fele a maximális sebességnek. Határozzuk meg a nyírófeszültség eloszlást. A Newton egyenletből következik, hogy

$$\tau(r) = -\frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L} \cdot r \quad (13.49)$$

A nyírófeszültség a cső közepén zérus, kifelé haladva lineárisan növekszik a sugárral. Az is látszik, hogy a nyíróerő egyenesen arányos a nyomáseséssel és fordítottan a folyadék viszkozitásával.



13.12. ábra: A sebességprofil és a nyírófeszültség eloszlása csőbeli áramlásnál

13.4.4. Gáz áramlása kapillárisban

Folyadékok áramlásának leírásánál kihasználtuk azt, hogy a folyadék összenyomhatatlan. Ennek következtében a cső két vége közötti nyomásesést távolság függvényében lineárisnak tekintettük (lásd az 13.39-es egyenletet). Gázoknál ez a feltétel az összenyomhatóság miatt nem teljesül.

$$\frac{dP}{dx} \neq konstans = \frac{\Delta P}{L} \quad (13.50)$$

Gázok áramlásánál a térfogatáram – az összenyomhatóság miatt - nem állandó, hanem helyről helyre változhat. Célszerű ezért a térfogatáram helyett a komponensáramot vizsgálni. Ez már független a nyomástól. A komponensáramot a tökéletes gázokra vonatkozó törvény felhasználásával úgy kapjuk meg, hogy a térfogatáramot megszorozzuk a nyomással és elosztjuk RT-vel.

$$I_V = \frac{dV}{dt} = \frac{P}{RT} \cdot \frac{dn}{dt} = \frac{P}{RT} \cdot I_n \quad (13.51)$$

Írjuk át a Hagen-Poiseuille egyenletet az I_n komponensáram segítségével:

$$I_n = \frac{P}{RT} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{R_0^4 \pi}{8\eta} \cdot \frac{P}{RT} \cdot \frac{dP}{dx} \quad (13.52)$$

A fenti differenciálegyenletet célszerű a megoldás érdekében átalakítani.

$$I_n \cdot dz = \frac{R_0^4 \pi}{16\eta RT} \cdot d(P^2) \quad (13.53)$$

Mivel a komponensáram a cső minden pontján azonos, nem függ z-től, így az (13.53)-as differenciálegyenlet megoldása integrálással egyszerű feladat. Az eredmény:

$$I_n = \frac{R_0^4 \pi}{16L\eta RT} \cdot (P_1^2 - P_2^2) \quad (13.54)$$

A gáz áramlási sebessége nem a nyomások, hanem a nyomás-négyzetek különbségével arányos.

13.5 Newtoni és nem-Newtoni folyadékok

Azt a folyadékot, amelynek viszkozitása nem függ az áramlás intenzitásától (∇v -től vagy τ -tól) Newtoni folyadéknak nevezzük. A kismolekulájú folyadékok Newtoni-viselkedésűek, de sok folyadéknál, főként nagymolekulatömegű anyagok oldatainál a viszkozitás az áramlási viszonyoktól (a nyírófeszültségtől) is függ. Az ilyen ún. nem-Newtoni folyadékok két nagy csoportra oszthatók, attól függően, hogy a viszkozitásuk a nyírófeszültség növelésekor csökken vagy nő. Szerkezeti viszkozitásról beszélünk, ha a viszkozitás nyírás hatására csökken, dilatanciáról ha a nyírófeszültség növelése a viszkozitás növekedését vonja maga után.