Ha H_0 igaz, akkor a következő kifejezés χ^2 eloszlású, $\nu = n-1$ szabadsági fokkal:

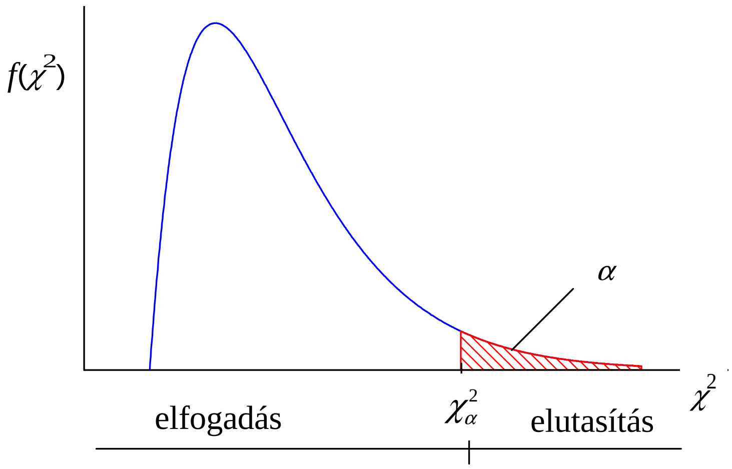
$$\chi_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2}\,.$$

A próbához α szignifikanciaszintet választva, annak valószínűsége, hogy a χ_0^2 próbastatisztika aktuális értéke az elfogadási tartományba esik, $1-\alpha$:

$$P\left(\frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} \le \chi_\alpha^2\right) = 1-\alpha\,.$$

χ_α^2 értékét α és $\nu = n-1$ függvényében a Függelék II. táblázata tartalmazza.

A H_0 nullhipotézist tehát elfogadjuk, ha $s^2(n-1)/\sigma_0^2 < \chi_\alpha^2$, elutasítjuk, ha $s^2(n-1)/\sigma_0^2 > \chi_\alpha^2$ (2-16. ábra).



2-16. ábra. A χ^2-próba kritikus értéke

Ha a H_0 hipotézis igaz, vagyis $\sigma^2 \le \sigma_0^2$, kicsi (α) annak valószínűsége, hogy a χ_0^2 próbastatisztika meghaladja a χ_α^2 kritikus értéket. Ha az ellenhipotézis az igaz, a próbastatisztika $\chi^2\sigma^2/\sigma_0^2$ eloszlású, és mivel $\sigma^2 > \sigma_0^2$, általában χ^2-nél nagyobb értéket vesz föl. Mindenesetre egy kis α-nál nagyobb a valószínűsége annak, hogy χ_α^2-tól jobbra eső értékeket vegyen fel, tehát a $H_1\!:\sigma_0 > \sigma_0^2$ ellenhipotézis jobb oldali ellenhipotézis.

2-12. példa

Normális eloszlásból vett 11 elemű minta szórásnégyzete $s^2 = 15.6$. Ellenőrizzük $\alpha = 0.05$-os szignifikanciaszinten, hogy elfogadható-e az az állítás, mely szerint a sokaság varianciája nem nagyobb, mint 14.0. Ellenhipotézisünk legyen az, hogy a variancia nagyobb, mint 14.0.

$$H_0\!:\sigma^2 \le 14.0 \qquad\qquad H_1\!:\sigma^2 > 14.0$$

A χ_0^2 próbastatisztika aktuális értéke:

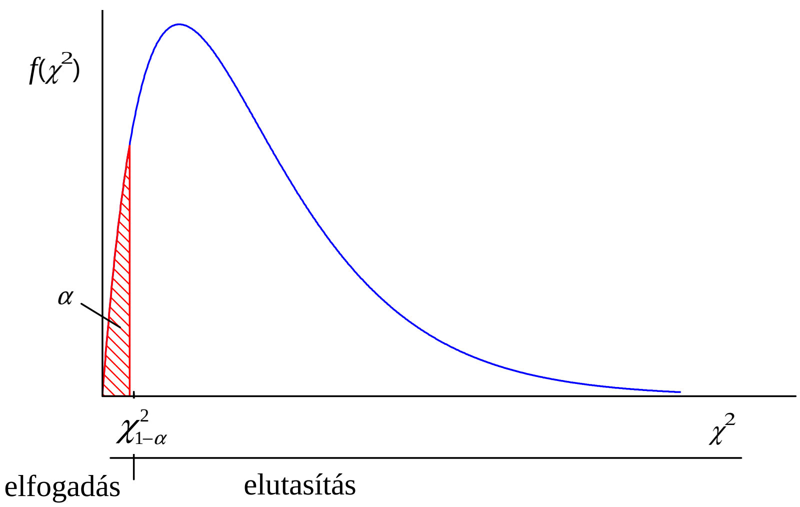
$$\chi_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} = \frac{15.6\cdot 10}{14.0} = 11.1 .$$

A Függelék II. táblázatából α=0.05-os szignifikanciaszinthez $\nu = 10$ esetén $\chi_\alpha^2 = 18.3$. Mivel a próbastatisztika értéke ezt a határt nem haladja meg, a H_0 nullhipotézist $\alpha = 0.05$ szignifikanciaszinten elfogadjuk.

Ha a H_1 ellenhipotézist megváltoztatjuk, és a H_0 nullhipotézist a bal oldali ellenhipotézis, azaz a

$$H_1\!:\sigma^2 < \sigma_0^2$$

ellenében vizsgáljuk, az elutasítási és az elfogadási tartományt a 2-17. ábra mutatja.



2-17. ábra. Elfogadási és elutasítási tartomány a bal oldali ellenhipotézishez

Azt, hogy most $\chi_0^2 < \chi_{1-\alpha}^2$ jelenti az elutasítási tartományt, vagyis alsó kritikus határt kell kijelölnünk, könnyen megértjük, ha meggondoljuk, hogy H_1 fennállása esetén a próbastatisztika kifejezésében a variancia valódi σ^2 értékénél nagyobb számmal, σ_0^2 -tel osztunk, ezért az $\chi^2\sigma^2/\sigma_0^2 < \chi^2$ lesz.

2-13. példa

Oldjuk meg a 2-12. példát $H_1\!:\sigma^2 < 14.0$ esetére! A II. táblázat jelöléseivel ν =10 szabadsági fokhoz az alsó kritikus határ: $\chi_{0.95}^2 = 3.94$. A próbastatisztika kiszámított értéke 11.1, így ebben az esetben is az elfogadási tartományba esik.

Az előbbi két gondolatmenetünk után az olvasó könnyen értelmezheti a $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ kétoldali ellenhipotézist.

2.2.4. Két szórásnégyzet összehasonlítása (*F*-próba)

Két, normális eloszlású sokaságból vett független minta szórásnégyzetének összehasonlításával el kell döntenünk, hogy a minták mögött álló sokaságok varianciái megegyeznek-e. Amennyiben a két variancia azonos, a szórásnégyzetek aránya *F*-eloszlású, vagyis a nullhipotézis:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

A próbastatisztika

$$F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = F\left(n_1 - 1, n_2 - 1\right) \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} .$$

Látható, hogy az F_0 próbastatisztika csakis akkor *F* eloszlású, ha a varianciák egyenlők, ellenkező esetben a σ_1^2 / σ_2^2 hányados értékétől függően lefelé $\left(\sigma_1^2 / \sigma_2^2 < 1\right)$, vagy fölfelé $\left(\sigma_1^2 / \sigma_2^2 > 1\right)$ eltér tőle.

Egyoldali ellenhipotézis esetén pl.

$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 .$$

Akkor utasítjuk el a nullhipotézist, és fogadjuk el az ellenhipotézist, ha $s_1^2 / s_2^2 > F_\alpha$.

Kétoldali ellenhipotézis esetén:

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 .$$

Akkor utasítjuk el a nullhipotézist, és fogadjuk el az ellenhipotézist, ha

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{1\text{-}\alpha/2} \text{ vagy } \frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{\alpha/2} .$$

A kétoldali próba gyakorlati kivitelezésekor célszerű, ha a tört számlálójába a nagyobb értékű szórásnégyzetet írjuk[1], vagyis

$$s_1^2 \,/\, s_2^2 \geq 1$$

Ilyenkor elég az elfogadási tartomány fölső határát ellenőrizni, mert ha

$$s_1^2 \,/\, s_2^2 > F_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2) ,$$

akkor egyúttal biztosak lehetünk abban, hogy

$$s_2^2 \,/\, s_1^2 > F_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2) \text{, ha } s_1^2 > s_2^2 .$$

Ez azt is jelenti, hogy az említett konvenciót követve elvégzett próbához nem $\alpha/2$, hanem $2\alpha/2 = \alpha$ szignifikanciaszint tartozik (így a 95 %-os egyoldali szint megfelel a 90 %-os kétoldali szintnek).

[1] A számítógépes programok elterjedésével ennek jelentősége egyre csökken, mivel nem szorulunk az *F*-eloszlás kizárólag *F* > 1 értékeket tartalmazó táblázatainak használatára.

2-14. példa

Egy vizsgálatot két mérési módszerrel (A és B) lehet elvégezni. Az A elemzéssel 12, a B elemzéssel 8 mintát vizsgáltak meg. A tapasztalati szórásnégyzet az első esetben $s_A^2 = 0.0244$, a második esetben $s_B^2 = 0.0300$ volt.

Állapítsuk meg, van-e a két módszer ismételhetősége között különbség!

$$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 ;$$

$$\frac{s_B^2}{s_A^2} = \frac{0.0300}{0.0244} = 1.23 .$$

A Függelék IV. táblázatából az a kritikus érték, amelyet az F-eloszlású valószínűségi változó 95 % valószínűséggel nem halad meg, ha a számláló szabadsági foka 7, a nevezőé pedig 11: $F_{0,95}$ (7, 11) = 3.01.

Minthogy a konvenció szerint a nagyobb szórásnégyzetet írjuk a számlálóba, ez a felső határ 90 %-os kétoldali szintnek felel meg.

Mivel $s_B^2 / s_A^2 < F_\alpha$, a nullhipotézist elfogadjuk, és azt mondjuk, hogy a két módszer ismételhetősége 10 %-os szinten nem különbözik egymástól szignifikánsan.

2.2.5. A *t*-próba

Az u-próba használatához ismernünk kell a sokaság σ^2 varianciáját. Ez csak igen nagyszámú korábbi mérésből lehetséges, ami a gyakorlatban legtöbbször nem áll rendelkezésre. Láttuk a t-eloszlás bemutatásakor, hogy az az u-eloszlással rokon, tőle éppen abban különbözik, hogy a legtöbbször ismeretlen σ^2 variancia helyett benne az s^2 szórásnégyzet szerepel.

2.2.5.1. Egymintás *t*-próba

Az egymintás t-próba hasonló az u-próba előbb ismertetett változatához. Annak vizsgálatára alkalmas, hogy a várható érték különbözik-e egy adott értéktől; csak az u-próbánál használt, de általában ismeretlen σ^2 variancia helyett a t-próbánál a kiszámítható tapasztalati szórásnégyzet szerepel.

Tehát a nullhipotézis:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{; vagy másképpen: } H_0 : \mu - \mu_0 = 0 .$$

Az ellenhipotézis a kétoldali változatnál:

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \text{; vagy másképpen: } H_1 : \mu - \mu_0 \neq 0 .$$

A próbastatisztika:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} .$$

2.2.5.2. Kétmintás *t*-próba

A kétmintás t-próbánál két, egymástól független minta mögött álló sokaság várható értékének különbözőségére vonatkozik a nullhipotézis (pl. H_0 : $\mu_1 - \mu_2 = 0$). A statisztikai próba elvégzéséhez ismert a két minta elemszáma (n_1 és n_2), valamint szórásnégyzetük (s_1^2 és s_2^2).

Tételezzük fel, hogy a két sokaság varianciája megegyezik. Ezt a 2.2.4. pontban ismertetett F-próbával ellenőrizni kell!

Vezessünk be egy új valószínűségi változót:

$$d = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 . \tag{2.22}$$

A d eloszlása is normális, paraméterei:

$$E(d) = E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = E(\bar{x}_1) - E(\bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2 , \tag{2.23}$$

$$Var(d) = Var(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = Var(\bar{x}_1) + Var(\bar{x}_2) =$$

$$= \sigma^2/n_1 + \sigma^2/n_2 = \sigma^2(1/n_1 + 1/n_2) . \tag{2.24}$$

Egy, a d-től független valószínűségi változó, s_d^2 a következőképpen származtatható:

$$s_d^2 = s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) . \tag{2.25}$$

A képletben s^2 a két minta szórásnégyzetéből egyesítéssel adódik:

$$s^2 = \frac{1}{n_1+n_2-2}\left[s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)\right] . \tag{2.26}$$

A következő kifejezés t-eloszlású, $\nu = n_1 + n_2 - 2$ szabadsági fokkal:

$$t = \frac{d - E(d)}{s_d} = \frac{d - E(d)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} . \tag{2.27}$$

A nullhipotézis: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, ekkor $E(d) = 0$.

A próbastatisztika tehát:

$$t_0 = \frac{d - 0}{s_d} = \frac{d}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} , \quad (\nu = n_1 + n_2 - 2) . \tag{2.28}$$

Amennyiben az így kiszámított próbastatisztika t-eloszlású, vagyis értéke a $-t_{\alpha/2}$ alsó és a $t_{\alpha/2}$ fölső küszöbérték között van ($-t_{\alpha/2} < t \le t_{\alpha/2}$), azt mondhatjuk, hogy a két átlagérték különbözősége α szinten nem szignifikáns. Az s^2 egyesített szórásnégyzet használata előnyösebb, mint ha s_d^2 kiszámítására csak s_1^2 -et vagy csak s_2^2-et használnánk, mert szabadsági foka nagyobb, így a Függelék III. táblázatában hozzá kisebb kritikus érték tartozik. Az itt leírt vizsgálat: t-próba két minta középértékének különbözőségére.

2-15. példa

Egy gépről két különböző napon lekerülő alkatrészekből mintát vettek, az alkatrészek tömegére a következőket kapták:

$n_1 = 10 \qquad \bar{x}_1 = 50.0$ g $\qquad s_1^2 = 2.0 \cdot 10^{-2}$ g^2 ;

$n_2 = 15 \qquad \bar{x}_2 = 49.8$ g $\qquad s_2^2 = 1.5 \cdot 10^{-2}$ g^2 .

Különböző-e a két napon a gyártott alkatrészek tömegének várható értéke 5 %-os szignifikanciaszinten?

Először *F*-próbával ellenőrizzük azt a hipotézist, hogy a két minta azonos varianciájú sokaságból származik.

$$F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{2.0 \cdot 10^{-2}}{1.5 \cdot 10^{-2}} = 1.333$$

A számláló szabadsági foka $\nu_1 = n_1 - 1 = 9$; a nevezőé $\nu_2 = n_2 - 1 = 14$.

A Függelék IV. táblázatából az a kritikus érték, amelyet az *F*-eloszlású valószínűségi változó 95 % valószínűséggel nem halad meg, ha a számláló szabadsági foka 9, a nevezőé pedig 14: $F_{0,95}$ (9, 14) = 2.65.

Mivel $s_1^2 / s_2^2 < F_\alpha$, a nullhipotézist elfogadjuk.

$$d = 0.2 \text{ g};$$

$$s^2 = \frac{1}{10+15-2}\left(2 \cdot 10^{-2} \cdot 9 + 1.5 \cdot 10^{-2} \cdot 14\right) = \frac{3.9 \cdot 10^{-1}}{23} = 1.7 \cdot 10^{-2};$$

$$s = \sqrt{1.7 \cdot 10^{-2}} = 0.1305;$$

$$t_0 = \frac{0.2}{0.1305 \cdot \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}}} = 3.7 .$$

A *t*-eloszlás kritikus értéke a Függelék III. táblázatából $\nu = 23$ szabadsági fokhoz ($\alpha = 0.05$): $t_{\alpha/2}$ = 2.069. A próbastatisztika értéke a kritikus határt meghaladja, tehát a nullhipotézist elutasítjuk: a két nap közötti különbség 5 %-os szinten szignifikáns.

Kérdezhetjük, hogy adott mintaelemszámmal mekkora különbséget tudnánk kimutatni. Amit kiszámolhatunk, hogy az ismétlések varianciájához képest mekkora a kimutatható eltérés:

$$\Delta = \frac{\delta}{\sigma}, \text{ ahol } \delta = |\mu_1 - \mu_2|$$

Például nézzük meg, hogy mindkét mintában 3 ismétlés esetén mekkora a Δ?

A Függelék IX. táblázatában találjuk a Δ értékeket α = 0.05 és β = 0.1 hibavalószínűségekhez. Az oszlopokban van az összehasonlítandó csoportok száma (a kétmintás *t*-próbánál ez 2), a sorokban az ismétlésszám, ez most 3. A Δ érték a táblázatból 3.544, ami azt jelenti, hogy az ismétlések szórásának több mint háromszorosát kitevő különbséget tudunk csak kimutatni, ha mindkét minta 3 elemű.

Nézzük most meg, mekkora minták szükségesek, ha a kimutatni kívánt $\delta = |\mu_1 - \mu_2|$ különbség a variancia négyzetgyökével egyezik meg (Δ = 1.0). Ehhez a táblázat szerint a két mintában 19-19 adatra van szükség.

Ha a kétmintás t-próba végrehajtása során a 2.2.4. pontban ismertetett *F*-próba arra az eredményre vezet, hogy nem fogadható el a $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ feltevés, az itt ismertetett kétmintás *t*-próba nem alkalmazható, helyette a következő próbastatisztikát használjuk (Welch-próba):

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}. \tag{2.29}$$

A H_0 hipotézis fennállása esetén ez a t_0 statisztika közelítőleg Student-eloszlású, ν paraméterrel, ahol ν:

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{s_1^2/n_1}{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{s_2^2/n_2}{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}\right)^2. \tag{2.30}$$

A (2.23) kifejezéssel számított szabadsági fok jellemzően nem egész szám, de ez a számítógépes programokkal könnyen kezelhető.